C U P R I N S

3. IDENTITĂŢI TRIGONOMETRICE

1. Să se verifice identităţile următoare:

a) $1+\sin 2a=(\sin a+\cos a)^2$ b) $1-\sin 2a=(\sin a-\cos a)^2$

c) $\cos^4 a-\sin^4 a=\cos 2a$ d) $\sin^4 a+\cos^2 a=\sin^2 a+\cos^4 a$

e) $\sin^4 a+\cos^4 a=1-\frac{1}{2}\sin^2 2a$

f) $\sin^6 a+\cos^6 a=1-\frac{3}{4}\sin^2 2a$

g) $\left(\cos a+\sin a\right)^2+\left(\cos a-\sin a\right)^2=2$.

2. Să se verifice identităţile următoare:

a) $\cos 2a\cdot(1+\operatorname{tg} a\cdot\operatorname{tg} 2a)=1$ b) $\sin 2a\cdot(\operatorname{tg} a+\operatorname{ctg} a)=2$

c) $\sin 2a\cdot(\operatorname{tg} 2a-\operatorname{tg} a)=\operatorname{tg} a\cdot\operatorname{tg} 2a$

d) $\cos 3a\cdot\cos a+\sin^2 2a=\cos^2 a$

e) $\operatorname{tg} a=\sin 2a-\operatorname{tg} a\cdot\cos 2a$

f) $\sin^2 2a+\cos^2 a=1+\sin a\cdot\sin 3a$

g) $(1+\sin 2a)\cdot(1+\operatorname{tg}^2 a)=(1+\operatorname{tg} a)^2$.

3. Să se verifice identităţile următoare:

a) $\dfrac{1-\operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg} a}=\dfrac{\cos 2a}{1+\sin 2a}$ b) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg} a}-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg} a}=\operatorname{tg} 2a$

c) $\dfrac{\operatorname{tg} a\cdot\operatorname{tg} 2a}{\operatorname{tg} 2a-\operatorname{tg} a}=\sin 2a$ d) $\dfrac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} 2a-\operatorname{tg} a}=\cos 2a$

e) $\dfrac{\sin 2a}{\cos a+\cos^2 a}=2\cdot\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}$ f) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 a}{\operatorname{tg}^2 2a}=\dfrac{1+\operatorname{tg}^4 a}{2\cdot(2+\operatorname{tg}^2 2a)}$

g) $\dfrac{\sin 3a}{\cos 3a+\cos a}=\dfrac{1}{2}\cdot(\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} 2a)$.

4. Să se verifice identităţile următoare:

a) $(\sin a+\sin 2a)\cdot(2\cos a-1)=\sin 3a$

b) $(\cos a+\cos 2a)\cdot(2\cos a-1)=\cos 3a+1$

c) $\cos a+\sin 3a=\left(\sin a+\cos a\right)\left(\sin 2a+\cos 2a\right)$

d) $\sin a+\cos 3a=(\cos a-\sin a)(\cos 2a+\sin 2a)$

e) $\dfrac{\cos a}{1+\sin a}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{a}{2}\right)$ f) $\dfrac{\sin 2a}{1+\cos 2a}\cdot\dfrac{\cos a}{1+\cos a}=\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}$

g) $\sin a\cdot(1+\operatorname{tg}a)+\cos a\cdot(1+\operatorname{ctg}a)=\dfrac{1}{\sin a}+\dfrac{1}{\cos a}$.

5. Să se verifice identităţile următoare:

a) $\sin^2 b+\sin(a+b)\cdot\sin(a-b)=\sin^2 a$

b) $\cos^2 a+\sin(a+b)\cdot\sin(a-b)=\cos^2 b$

c) $\sin^2 b+\cos(a+b)\cdot\cos(a-b)=\cos^2 a$

d) $\sin^2 a+\cos(a+b)\cdot\cos(a-b)=\cos^2 b$

e) $\dfrac{\cos(a+b)\cdot\cos(a-b)}{\cos^2 a\cdot\cos^2 b}=1-\operatorname{tg}^2 a\cdot\operatorname{tg}^2 b$

f) $\sin^2(a+b)-\sin^2(a-b)=\sin 2a\cdot\sin 2b$

g) $(\sin a+\sin b)^2+\cos^2 a\cdot\cos^2 b=(1+\sin a\cdot\sin b)^2$.

6. Să se verifice identităţile următoare:

a) $\dfrac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}{\operatorname{ctg} a+\operatorname{ctg} b}=\operatorname{tg} a\cdot\operatorname{tg} b$

b) $\dfrac{\cos^2 a-\cos^2 b}{\sin^2 a\sin^2 b}=\operatorname{ctg}^2 a\cdot\operatorname{ctg}^2 b$

c) $\dfrac{2\sin(a+b)}{\cos(a-b)+\cos(a+b)}=\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b$

d) $\dfrac{\cos^2 a-\sin^2 b}{\cos^2(a-b)}+\dfrac{2\cdot\sin a\cdot\sin b}{\cos(a-b)}=1$

e) $\dfrac{\cos(a+b)-\sin(a-b)}{\cos(a-b)-\sin(a+b)}=\dfrac{\cos b+\sin b}{\cos b-\sin b}$

f) $\dfrac{\sin a+\cos(2b-a)}{\cos a-\sin(2b-a)}=\dfrac{1+\sin 2b}{\cos 2b}$

g) $\dfrac{\operatorname{tg}(a+b)-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}b\cdot\operatorname{tg}(a+b)}+\dfrac{\operatorname{tg}b+\operatorname{tg}(a-b)}{1-\operatorname{tg}b\cdot\operatorname{tg}(a+b)}=2\cdot\operatorname{tg}a$.

7. Să se verifice identităţile următoare:

a) $\sin 3a = 4 \cdot \sin a \cdot \sin(60^\circ + a) \cdot \sin(60^\circ - a)$

b) $\cos 3a = 4 \cdot \cos a \cdot \cos(60^\circ + a) \cdot \cos(60^\circ - a)$

c) $\operatorname{tg} 3a = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg}(60^\circ + a) \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - a)$.

8. Să se verifice identitatea:

$$\operatorname{tg} 3a = \operatorname{tg} 3a \cdot \operatorname{tg} 2a \cdot \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a$$

9. Să se verifice identitatea:

$$\sin^2(45^\circ + a) = \sin^2(30^\circ - a) + \sin 15^\circ \cdot \cos(15^\circ + 2a) + \sin 2a$$

10. Să se verifice identitatea:

$$\sin 3a \cdot \sin^3 a + \cos 3a \cdot \cos^3 a = \cos^3 2a$$

11. Să se verifice identitatea:

$$(\cos a + \cos 3a) \cdot (\cos 2a + \cos 4a) +$$
$$+(\sin a + \sin 3a) \cdot (\sin 2a + \sin 4a) = 4\cos^3 a$$

12. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\sin^6 a + \cos^6 a - 1} = \frac{2}{3}$$

13. Să se verifice identitatea:

$$\cos^2 a + \cos^2 2a + \cos^2 3a + \cos 2a + \cos 4a + \cos 6a =$$
$$= 6 \cdot \cos a \cdot \cos 2a \cdot \cos 3a.$$

14. Să se verifice identitatea:

$$(\sin^4 a - \sin^2 a + 1)^2 = (\cos^4 a - \cos^2 a + 1)^2$$

15. Să se verifice identităţile următoare:

a) $\operatorname{tg} a = \operatorname{ctg} a - 2 \cdot \operatorname{ctg} 2a$

b) $\operatorname{tg} a + 2 \cdot \operatorname{tg} 2a + 4 \cdot \operatorname{ctg} 4a = \operatorname{ctg} a$

c) $\operatorname{tg} a + 2 \cdot \operatorname{tg} 2a + 4 \cdot \operatorname{tg} 4a + 8 \cdot \operatorname{ctg} 8a = \operatorname{ctg} a$

16. Să se verifice identitatea:

$$1 + 2 \cdot \cos 4a + 2 \cdot \cos 8a = \frac{\sin 10a}{\sin 2a}$$

17. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\cos 7a}{2 \cdot \cos a} + \cos 4a + \frac{1}{2} = \cos 2a + \cos 6a$$

18. Să se verifice identităţile următoare:

a) $\dfrac{\sin a+\sin 2a+\sin 3a}{\cos a+\cos 2a+\cos 3a}=\operatorname{tg}\ 2a$

b) $\dfrac{\sin a+\sin 2a+\sin 3a+\sin 4a}{\cos a+\cos 2a+\cos 3a+\cos 4a}=\operatorname{tg}\dfrac{5a}{2}$

c) $\dfrac{\sin a+\sin 2a+\sin 3a+\sin 4a+\sin 5a}{\cos a+\cos 2a+\cos 3a+\cos 4a+\cos 5a}=\operatorname{tg}\ 3a$

19. Să se verifice identităţile următoare:

a) $\cos^2 2a+\cos^2(a-b)=2\cdot\cos(a-b)\cdot\cos(a+b)\cdot$
$\cdot\cos 2a+\sin^2(a+b)$

b) $\sin^2 a+\sin^2 b+2\cdot\sin a\cdot\sin b\cdot\cos(a+b)=\sin^2(a+b)$.

20. Să se verifice identitatea:

$$\cos^2(a+b)+\cos^2(a-b)=1+\cos 2a\cdot\cos 2b\ .$$

21. Să se verifice identitatea:

$$\cos^2 a+\cos^2 b+\sin(a+b)\cdot\sin(a-b)=2\cdot\cos^2 b\ .$$

22. Să se verifice identitatea:

$$\operatorname{tg}\ a=\operatorname{tg}\ b+\operatorname{tg}(a\text{-}b)+\operatorname{tg}\ a\cdot\operatorname{tg}\ b\cdot\operatorname{tg}(a\text{-}b)\ .$$

23. Să se verifice identitatea:

$$\cos^2(a-b)+\cos^2 b=\sin^2 a+2\cdot\cos(a-b)\cdot\cos a\cdot\cos b\ .$$

24. Să se verifice identitatea:

$$\operatorname{tg}^2(a+b)+\operatorname{tg}^2(a-b)=\frac{2\cdot(\sin^2 2a+\sin^2 2b)}{(\cos 2a+\cos 2b)^2}\ .$$

25. Să se verifice identitatea:

$$\operatorname{tg}(a-b)+\operatorname{tg}(b-c)+\operatorname{tg}(c-a)=\operatorname{tg}(a-b)\operatorname{tg}(b-c)\operatorname{tg}(c-a)\ .$$

26. Să se verifice identitatea:

$$\operatorname{tg}\ a+\operatorname{tg}\ \mathrm{b}+\operatorname{tg}\ \mathrm{c}-\operatorname{tg}\ a\cdot\operatorname{tg}\ \mathrm{b}\cdot\operatorname{tg}\ \mathrm{c}=\frac{\sin\left(\mathrm{a+b+c}\right)}{\cos a\cos b\cos c}\ .$$

27. Să se verifice identitatea:

$$\sin(\mathrm{a}+\mathrm{b})\cdot\sin(\mathrm{a}-\mathrm{b})+\sin(\mathrm{b}+\mathrm{c})\cdot\sin(\mathrm{b}-\mathrm{c})+$$
$$+\sin(\mathrm{c}+\mathrm{a})\cdot\sin(\mathrm{c}-\mathrm{a})=0$$

28. Ştiind că $a+b+c=\frac{\pi}{4}$, să se demonstreze identitatea:

$$\text{tg}\, a+\text{tg}\, b+\text{tg}\, c+\text{tg}\, a\cdot \text{tg}\, b+\text{tg}\, b\cdot \text{tg}\, c+\text{tg}\, c\cdot \text{tg}\, a=$$
$$=1+\text{tg}\, a\cdot \text{tg}\, b\cdot \text{tg}\, c$$

29. Ştiind că $a+b+c=0$, să se demonstreze identitatea:

$$\text{tg}\, a+\text{tg}\, b+\text{tg}\, c=\text{tg}\, a\cdot \text{tg}\, b\cdot \text{tg}\, c.$$

30. Ştiind că $a+b+c=0$, să se demonstreze identitatea:

$$\sin a\cdot\cos b\cdot\cos c+\cos a\cdot\sin b\cdot\cos c+\cos a\cdot\cos b\cdot\sin c=$$
$$=\sin a\cdot\sin b\cdot\sin c$$

31. Ştiind că $a+b+c=\frac{\pi}{2}$, să se demonstreze identitatea:

$$.\sin a\cdot\cos b\cdot\cos c+\cos a\cdot\sin b\cdot\cos c+\cos a\cdot\cos b\cdot\sin c=$$
$$=1+\sin a\cdot\sin b\cdot\sin c$$

32. Ştiind că $a+b+c=0$, să se demonstreze identitatea:

$$\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c=\sin a\cdot\sin b\cdot\sin c+\sin a\cdot\cos b\cdot\cos c+$$
$$+\cos a\cdot\sin b\cdot\sin c.$$

33. Ştiind că $a+b+c=\pi$, să se demonstreze identităţile:

a) $\sin a+\sin b+\sin c=4\cdot\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}\cdot\cos\frac{c}{2}$

b) $\cos a+\cos b+\cos c=1+4\cdot\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}\cdot\sin\frac{c}{2}$

c) $\sin a+\sin b-\sin c=4\cdot\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}\cdot\cos\frac{c}{2}$

d) $\cos a+\cos b-\cos c+1=4\cdot\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}\cdot\sin\frac{c}{2}$

e) $\text{tg}\, a+\text{tg}\, b+\text{tg}\, c=\text{tg}\, a\cdot\text{tg}\, b\cdot\text{tg}\, c$

f) $\sin 2a+\sin 2b+\sin 2c=4\cdot\sin a\cdot\sin b\cdot\sin c$

g) $\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+1+4\cdot\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c=0$

h) $\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c=2\cdot\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c+2$

i) $\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c+2\cdot\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c=1$

j) $\sin^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{b}{2}+\sin^2\frac{c}{2}+2\cdot\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}\cdot\sin\frac{c}{2}=1$

k) $\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{c}{2}=2\cdot\left(1+\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}\cdot\sin\frac{c}{2}\right)$

l) $\operatorname{ctg} a\cdot\operatorname{ctg} b+\operatorname{ctg} a\cdot\operatorname{ctg} c+\operatorname{ctg} b\cdot\operatorname{ctg} c=1$

m) $\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2}+\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}+\operatorname{tg}\frac{b}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}=1$

n) $\operatorname{ctg}\frac{a}{2}+\operatorname{ctg}\frac{b}{2}+\operatorname{ctg}\frac{c}{2}=\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{b}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{c}{2}$

o) $\operatorname{ctg}\frac{a}{2}-\operatorname{tg}\frac{b}{2}-\operatorname{tg}\frac{c}{2}=\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}$

p) $\frac{\cos a}{\sin b\cdot\sin c}+\frac{\cos b}{\sin c\cdot\sin a}+\frac{\cos c}{\sin a\cdot\sin b}=2$

q) $\operatorname{ctg} a+\frac{\sin a}{\sin b\cdot\sin c}=\operatorname{ctg} b+\frac{\sin b}{\sin c\cdot\sin a}=$

$=\operatorname{ctg} c+\frac{\sin c}{\sin a\cdot\sin b}$

r) $(\operatorname{ctg} a+\operatorname{ctg} b)\cdot(\operatorname{ctg} b+\operatorname{ctg} c)\cdot(\operatorname{ctg} c+\operatorname{ctg} a)=$

$$=\frac{1}{\sin a\cdot\sin b\cdot\sin c}$$

34. Să se arate că dacă $\cos(a+b)=1$ atunci:

$$\sin(2a+b)=\sin a$$

35. Să se arate că dacă $\cos(a+b+c)=1$ atunci:

$$\sin(2a+b+c)=\sin a$$

36. Să se arate că dacă $\sin a+\sin b=2\cdot\sin(a+b)$ şi $a+b=k\pi, k\in Z,$ atunci: $\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\frac{1}{3}$.

37. Să se arate că dacă $3\cdot\sin b=\sin(2a+b)$ atunci:

$$\operatorname{tg}(a+b)=2\cdot\operatorname{tg}a$$

38. Arătaţi că dacă $\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b=\operatorname{tg}^2c$ avem:

$$\frac{\sin^2(a+c)}{\sin^2(b+c)}=\frac{\sin 2a}{\sin 2b}.$$

4. EXPRESII CALCULABILE PRIN LOGARITMI

1. Să se transforme în expresii calculabile prin logaritmi:

a) $E(x)=1+\cos x$ b) $E(x)=1-\cos x$

c) $E(x)=\sin x+\cos x$ d) $E(x)=\sin x-\cos x$

e) $E(x)=1+\sin x$ f) $E(x)=1-\sin x$

g) $E(x)=\sin x+\operatorname{tg} x$ h) $E(x)=\cos x-\cos 3x$

i) $E(x)=\sin x+\sin 5x$ j) $E(x)=\sin x-\cos 3x$

k) $E(x)=1+\sin x+\cos x$ l) $E(x)=1-\sin x+\cos x$

m) $E(x)=1+\sin 2x-\cos 2x$ n) $E(x)=1-\sin 4x-\cos 4x$.

2. Să se transforme în expresii calculabile prin logaritmi:

a) $E(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x$

b) $E(x)=\sin x-\sin 2x+\sin 3x$

c) $E(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$

d) $E(x)=\cos x-\cos 2x+\cos 3x$

e) $E(x)=\sin x+\cos x+\sin 3x$

f) $E(x)=\sin x+\cos x-\cos 3x$

g) $E(x)=\sin x+\cos 2x-\sin 3x$

h) $E(x)=\cos x-\sin 2x+\cos 3x$

i) $E(x)=\sin x+\sin 4x+\sin 5x$.

3. Să se transforme în expresii calculabile prin logaritmi:

a) $E(x)=1+\cos 2x+\cos 3x+\cos 5x$

b) $E(x)=1+\cos x+\cos 3x+\cos 4x$

c) $E(x)=1-\cos x+\cos 3x-\cos 4x$

d) $E(x)=1+\sin x+\cos 2x+\sin 3x$

e) $E(x)=1-\sin x-\cos 4x+\sin 5x$

f) $E(x)=1+\sin 2x-\cos 4x+\sin 6x$

g) $E(x)=\cos x+\sin 2x+\sin 4x-\cos 5x$

h) $E(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x$

i) $E(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x$

j) $E(x)=\cos x-\cos 2x+\cos 3x-\cos 4x$

k) $E(x)=1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x$.

4. Să se transforme în expresii calculabile prin logaritmi:

a) $E(x)=\text{tg } x+\text{tg } 2x-\text{tg } 3x$ b) $E(x)=\text{tg } x+\text{tg } 3x-\text{tg } 4x$

c) $E(x)=\text{tg } x+\text{tg } 2x-3\text{tg } 3x$ d) $E(x)=\text{tg}x+\text{tg}2x-4\text{tg}3x$

e) $E(x)=\text{tg } 3x-\text{tg } 2x-\text{tg } x$.

5. Să se transforme în expresii calculabile prin logaritmi:

a) $E(x)=\dfrac{\sin x+2\cdot\cos x}{2\cdot\sin x+\cos x}+\dfrac{\sin x-2\cdot\cos x}{2\cdot\sin x-\cos x}$

b) $E(x)=\dfrac{2\cdot\sin x+3\cdot\cos x}{3\cdot\sin x+2\cdot\cos x}+\dfrac{2\cdot\sin x-3\cdot\cos x}{3\cdot\sin x-2\cdot\cos x}$

c) $E(x)=\dfrac{\sin x+3\cdot\cos x}{3\cdot\sin x-\cos x}+\dfrac{\sin x-3\cdot\cos x}{3\cdot\sin x+\cos x}$

d) $E(x)=\dfrac{a\cdot\sin x+b\cdot\cos x}{b\cdot\sin x-a\cdot\cos x}+\dfrac{a\cdot\sin x-b\cdot\cos x}{b\cdot\sin x+a\cdot\cos x}$.

6. Să se transforme în expresii calculabile prin logaritmi:

a) $E(x)=\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}+a\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}-a\right)$

b) $E(x)=\cos 3x\cos x+2\cdot\sin^2 2x-1$

c) $E(x)=\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x+\sin 3x+\cos 3x$

d) $E(x)=\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+$
$+\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x$

e) $E(x)=(\sin x+\sin 3x)\cdot(\sin 2x+\sin 4x)+$
$+(\cos x+\cos 3x)\cdot(\cos 2x+\cos 4x)$

f) $E(x,y)=\cos^2(x-y)+\cos^2 y-\sin^2 x$

g) $E(x,y)=\cos^2 x-\sin^2 y$

h) $E(x,y)=\cos^2 x-\cos^2 y$

i) $E(x,y,z)=\text{tg}(x-y)+\text{tg}(y-z)+\text{tg}(z-x)$

j) $E(x,y,z)=\cos^2(x-y)+\cos^2(y-z)+\cos^2(z-x)-1$.